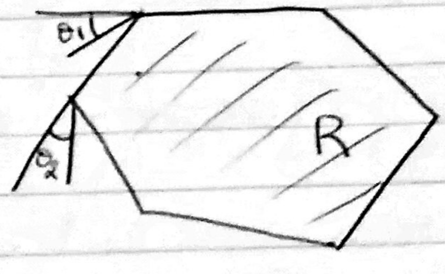
Ολική Διαφορική Γεωμετρία

17/04/2018

Θα δούμε κάποια πορίσματα από το ολικό Θεώρημα Gauss-Bonnet:

Πόρισμα 1: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια και $R \subset S$ απλή περιοχή της οποίας το ∂R είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη. Τότε:

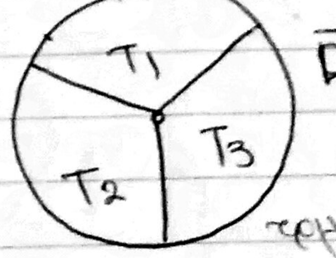
$$\int_{\partial R} k_g(s)\,ds + \iint_R K\,d\sigma + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi.$$



Απόδειξη: Από την υπόθεση η περιοχή R είναι ομοιομορφική με κλειστό δίσκο $\overline{D}$.

Άρα $\chi(R) = \chi(\overline{D})$.

Ας υπολογίσουμε το $\chi(\overline{D})$



έχω κάνει τριγωνοποίηση με 3 τρίγωνα τα T_1, T_2, T_3.

$F = 3$ (αριθμός τριγώνων)

$E = 6$ (αριθμός ακμών)

$V = 4$ (αριθμός κορυφών)

$\chi(\overline{D}) = F - E + V = 3 - 6 + 4 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \chi(R) = \chi(\overline{D}) = 1$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από Gauss-Bonnet ∎

Πόρισμα 2: Έστω S κανονική προσανατολισμένη συμπαγής επιφάνεια. Τότε:

$$\iint_S K\, d\sigma = 2\pi\, \chi(S)$$

Η απόδειξη είναι άμεση.

Πόρισμα 3: Μια συμπαγής επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K>0$ είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα S^2.

Απόδειξη: Από Gauss-Bonnet έχουμε ότι το ολοκλήρωμα της καμπυλότητας είναι 2 φορές π χαρακτηριστική της επιφάνειας, άρα:

$$0 < \iint_S K\, d\sigma = 2\pi\chi(S) \Rightarrow \chi(S) > 0 \Rightarrow \chi(S) = 2 = \chi(S^2) \Rightarrow$$

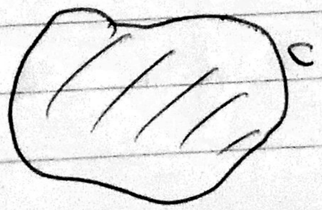
$\Rightarrow S$ ομοιομορφική με S^2 ∎

Θα χρειαστούμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα Jordan: Κάθε απλή κλειστή κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη στο επίπεδο, είναι το σύνορο μιας απλής περιοχής.

(χωρίς απόδειξη).

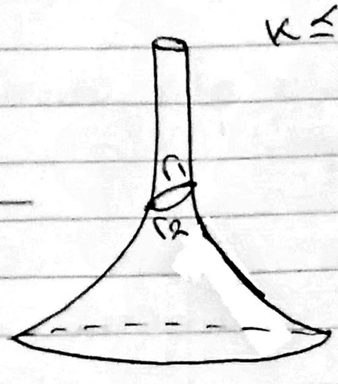
"Δηλαδή αν πάρω μια καμπύλη κλειστή που δεν έχει αυτοτομές, η περιοχή που θα σχηματιστεί δεν θα έχει τρύπα"



$\rightarrow$

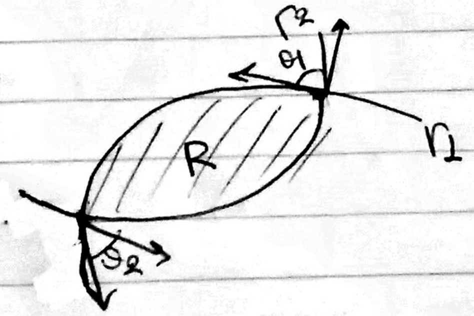
Πόρισμα 4: Έστω S προσανατολισμένη επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K \geq 0$. Δύο γεωδαισιακές που τέμνονται σε ένα σημείο $P \in S$ δεν είναι δυνατό να ξανατέμνονται με τέτοιον τρόπο ώστε να σχηματίζουν σύνορο απλής περιοχής.

Απόδειξη:



Ας υποθέσουμε σε αντίθεση ότι Γ_1, Γ_2 είναι γεωδαισιακές που τέμνονται και στο εσωτερικό σχηματίζουν απλή περιοχή

μεγέθυνση:



Από θεώρημα Gauss-Bonnet $\Rightarrow \iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \Rightarrow$

$K \leq 0$

$\Rightarrow 0 \geq 2\pi - \theta_1 - \theta_2 \rightarrow \boxed{\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi}$ ① (αν ήταν θ_1 ή $\theta_2 = \pi$ οι Γ_1, Γ_2 θα ήταν η μία συνέχεια της άλλης, δηλ. δεν θα είχαμε τομή)

όμως $\left.\begin{array}{l}\theta_1 < \pi \\ \theta_2 < \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$

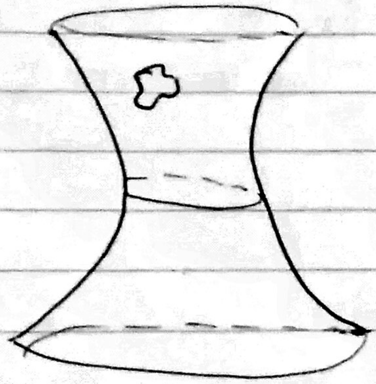
Άρα λόγω της ① καταλήξαμε σε άτοπο ∎

Πόρισμα 5: Σε μια επιφάνεια S με $K<0$ δεν υπάρχει κλειστή γεωδαισιακή που να είναι σύνορο απλής περιοχής.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι τέτοια γεωδαισιακή υπάρχει, τότε από Gauss-Bonnet:

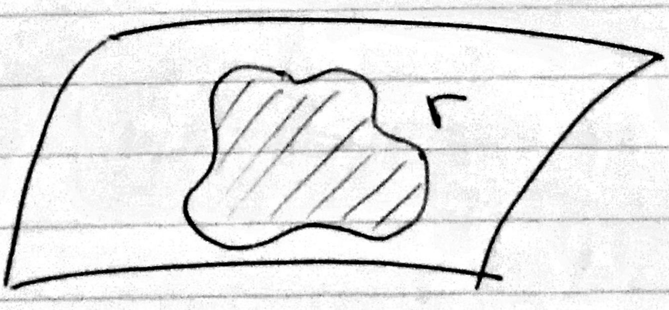
$$\iint_R K \, d\sigma = 2\pi \quad , \text{όμως} \quad \iint_R K \, d\sigma \le 0 \quad \text{και} \quad 2\pi > 0$$

Άρα καταλήξαμε σε άτοπο



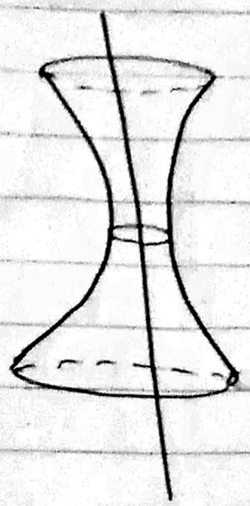
Πόρισμα 6: Έστω ότι S είναι απλά συνεκτική επιφάνεια με $K \le 0$. Τότε δεν υπάρχει καμία κλειστή γεωδαισιακή.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από πόρισμα 5.



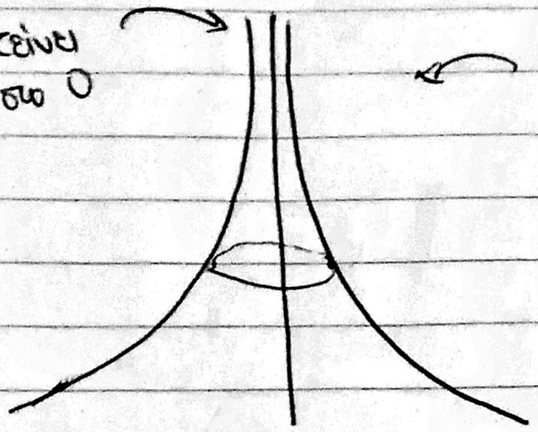
Πόρισμα 7: Έστω S κανονική επιφάνεια η οποία είναι ομοιομορφική με τον κύλινδρο και έχει $K<0$ (γνησίως) τότε η S έχει το πολύ μία κλειστή γεωδαισιακή

Απόδειξη:



γεωδαισιακή είναι ο κύκλος με την μικρότερη ακτίνα: άρα έχει μία

Περιγραφή

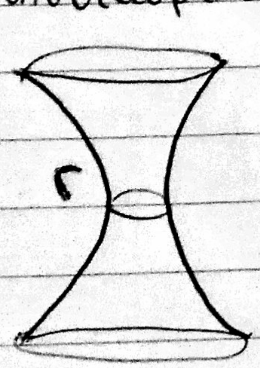


τείνει στο 0

εδώ δεν έχουμε κλειστή γεωδαισιακή

Άρα έχουμε ή μία ή καμία γεωδαισιακή

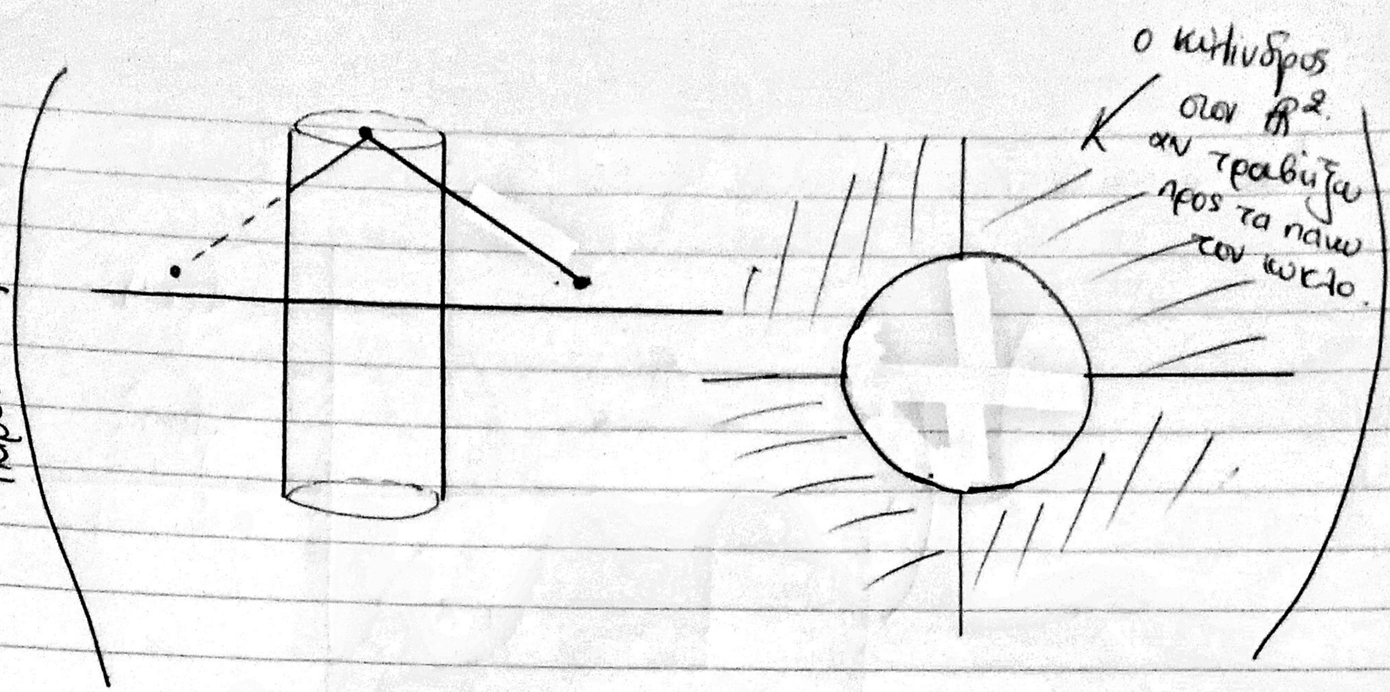
Ας υποθέσουμε ότι η S διαθέτει κανονική γεωδαισιακή



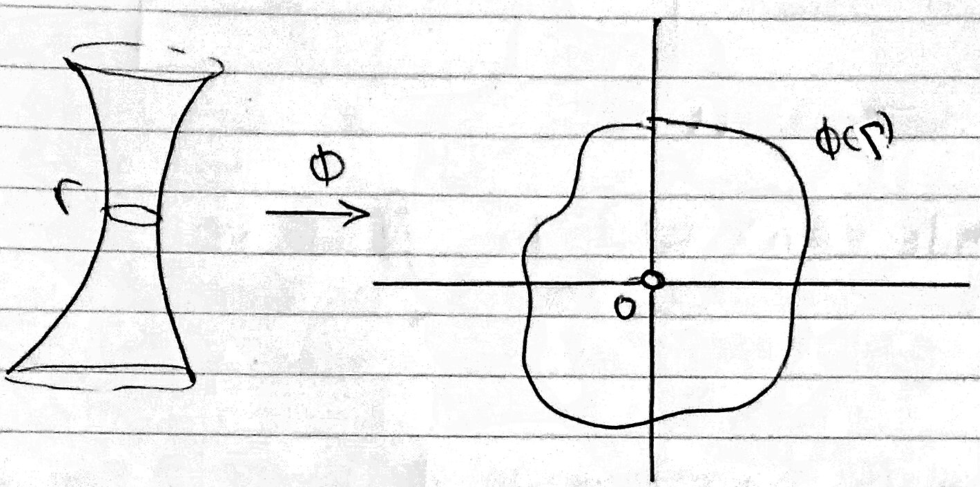
Από υπόθεση η επιφάνεια S είναι ομοιομορφ με κύλινδρο άρα υπάρχει ομοιομορφισμός

$$\Phi: S \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

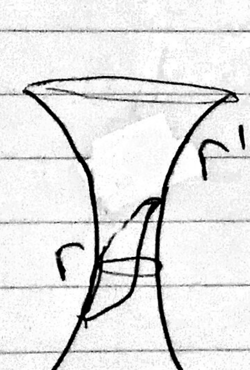
Παρένθεση



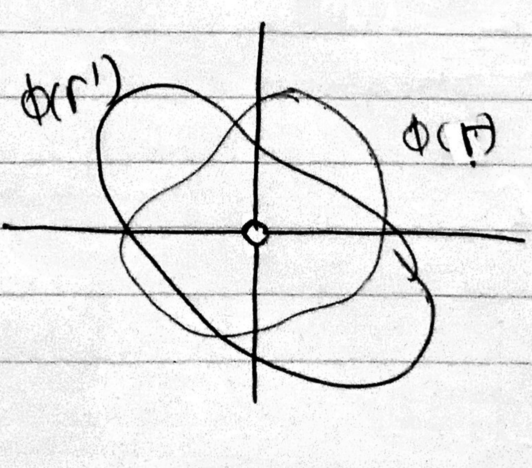
→



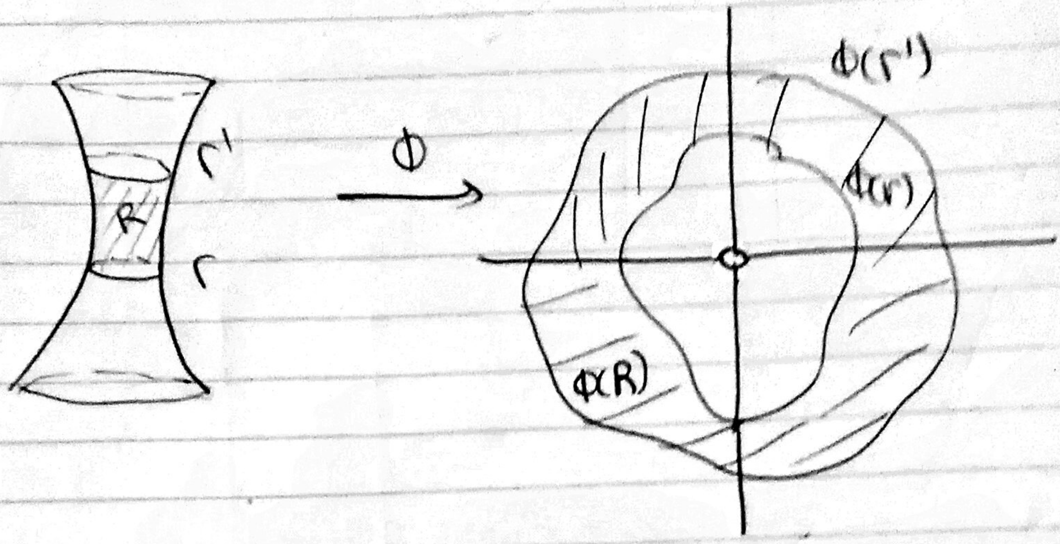
Από πόρισμα 2 η $\phi(\Gamma)$ είναι σύνορο περιοχής που περιέχει το O.
Ας υποθέσουμε ότι $\exists$ και δεύτερη γεωδαισιακή Γ'.



Ισχυρίζομαι ότι $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$. Αυτό συμβαίνει για τον εξής λόγο. Εάν υπήρχε τομή τότε μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων θα σχηματίζεται κλειστή περιοχή και αυτό δεν μπορεί να συμβεί



Άρα η κατάσταση έχει ως εξής:

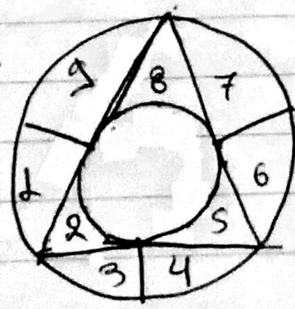


Τότε από Gauß-Bonnet ⇒

$$\Rightarrow \iint_R K\,d\sigma = 2\pi\,\chi(R) \quad \text{με} \quad \iint_R K\,d\sigma < 0$$

Τώρα θα κάναμε τριγωνοποίηση στο $\Phi(R)$ και θα είναι ως εξής:

$R \simeq \Delta$

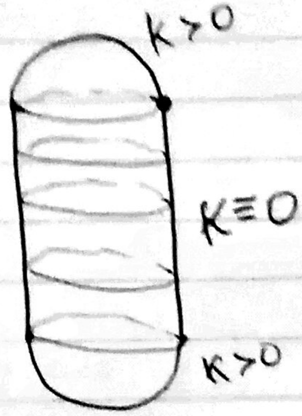


$$\left.\begin{array}{l} F = 9 \\ E = 18 \\ V = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\chi(\Delta) = 0} \ (1)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad 0 > 0 = 2\pi\,\chi(R) \quad \text{άτοπο!}$$

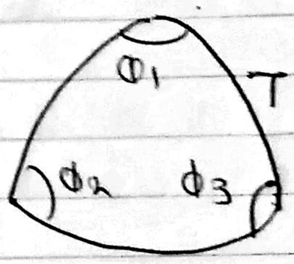
! <u>Σημείωση</u>: Ούτε εδώ μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση $K>0$ σε $K\geq 0$.

Για παράδειγμα:



<u>Πόρισμα 9</u>: Έστω S επιφάνεια και T ένα γεωδαισιακό τρίγωνο, τότε από Gauss-Bonnet έχουμε ότι:

$$\boxed{\iint_T K\,d\sigma = \phi_1+\phi_2+\phi_3-\pi}$$



Από το παραπάνω πόρισμα προκύπτει:

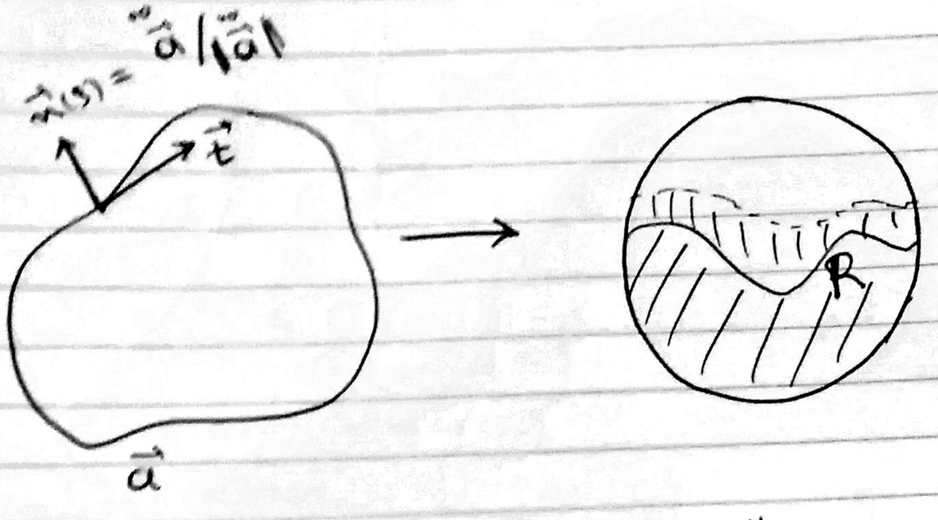
(i) Εάν $K\equiv 0 \Rightarrow S =$ Επίπεδο $\Rightarrow \phi_1+\phi_2+\phi_3=\pi$

(ii) Εάν $K\equiv 1 \Rightarrow \text{Area}(T)=\phi_1+\phi_2+\phi_3-\pi$ (στο γεωδ. τρίγωνο αν ξέρω τις γωνίες, βρίσκω κατευθείαν το εμβαδό του)

(iii) Εάν $K\equiv -1 \Rightarrow \text{Area}(T)=\pi-\phi_1-\phi_2-\phi_3$

$\rightarrow \longrightarrow$

Θεώρημα Jacobi: Έστω $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ κλειστή κανονική καμπύλη με θετική καμπυλότητα. Υποθέτουμε ότι το πρώτο κάθετο $\vec{n}(s)$ ορίζει μια απλή (κλειστή) στην S^2. Τότε το $\vec{n}(s)$ χωρίζει την S^2 σε δύο ισεμβαδικές περιοχές.



► Υποθέτουμε ότι η $\vec{\alpha}$ έχει παράμετρο το μήκος τόξου s και η καμπύλη $\vec{n}(\bar{s})$ έχει παράμετρο πάλι το μήκος τόξου $\bar{s}$.

Η ιδέα είναι να υπολογίσουμε την γεωδαισιακή καμπυλότητα $\bar{k}_g$ της $\vec{n}$ ως προς στοιχεία της $\vec{n}$.

Μετά από υπολογισμούς, αποδεικνύεται ότι:

$$\bar{k}_g = \left(\arctan\frac{\tau}{k}\right)'\frac{ds}{d\bar{s}}$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε το Θεώρημα Gauss-Bonnet.

Άρα:

$$\int_{\partial R} \underbrace{\left(\arctan\frac{\tau}{k}\right)' ds}_{0} + \iint_R \underbrace{k\, d\sigma}_{1} = 2\pi \Rightarrow$$

0 γιατί είμαστε σε κλειστή καμπύλη

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Area}(R) = 2\pi = \frac{\mathrm{Area}(S^2)}{2}}$$